• 수학영역 •

정 답

1	②	2	⑤	3	①	4	③	5	④
6	①	7	⑤	8	①	9	④	10	②
11	②	12	③	13	④	14	③	15	③
16	⑤	17	⑤	18	④	19	②	20	①
21	②	22	6	23	15	24	126	25	32
26	578	27	153	28	29	29	9	30	91

해 설

1. [출제의도] 근호를 포함한 식의 값을 계산한다.

$\sqrt{20}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}+\sqrt{5}$

$=3\sqrt{5}$

2. [출제의도] 일차방정식의 해를 계산한다.

$\frac{x}{2}+7=2x-8$에서 $x+14=4x-16$

$3x=30$

$x=10$

3. [출제의도] 일차함수의 그래프의 평행이동을 이용하여 일차항의 계수를 계산한다.

일차함수 $y=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 일차함수의 식은

$y=ax-3$

이 일차함수의 그래프가 점 $(2, 9)$를 지나므로

$y=ax-3$에 $x=2$, $y=9$를 대입하면 $9=2a-3$

$2a=12$

따라서 $a=6$

4. [출제의도] 피타고라스 정리를 이해하여 정사각형의 넓이를 구한다.

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

$=3^2+2^2$

$=13$

따라서 선분 AC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$\overline{AC}^2=13$

5. [출제의도] 줄기와 잎 그림을 이해하여 최빈값을 구한다.

주어진 줄기와 잎 그림에서

34세가 3번,

19세, 25세, 28세가 각각 2번씩,

17세, 18세, 20세, 35세, 41세, 46세가 각각 1번씩 나타난다.

34세가 3번으로 가장 많이 나타나므로

최빈값은 34세이다.

6. [출제의도] 다항식의 곱셈을 이해하여 상수의 값을 구한다.

$(x+a)(x-3)=x^2+(a-3)x-3a$

$=x^2+bx+6$

에서 $a-3=b$, $-3a=6$

$a=-2$이고, 이를 $a-3=b$에 대입하면 $b=-5$

따라서 $ab=(-2)\times(-5)=10$

7. [출제의도] 일차함수와 일차방정식의 관계를 이해하여 교점의 좌표를 구한다.

두 일차방정식의 그래프의 교점의 좌표는 x, y에 대한 연립방정식의 해이다.

$\begin{cases} x-2y=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+y=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$+2\times$㉡에서

$5x=5$

$x=1$이므로 $y=-3$

$a=1$, $b=-3$

따라서 $a+b=1+(-3)=-2$

8. [출제의도] 경우의 수를 이해하여 주어진 사건의 확률을 구한다.

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

나오는 눈의 수를 각각 a, b라 하고 이것을 순서쌍 (a, b)로 나타내면

(i) a와 b의 차가 2인 경우

$(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 6)$,

$(3, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 3)$, $(6, 4)$의 8가지

(ii) a와 b의 차가 4인 경우

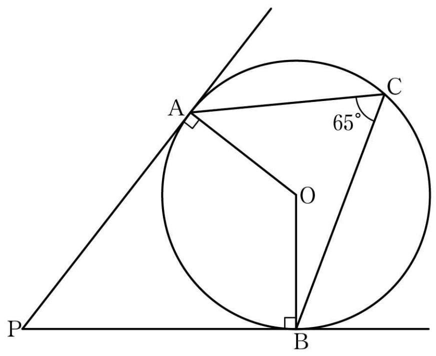
$(1, 5)$, $(2, 6)$, $(5, 1)$, $(6, 2)$의 4가지

(i), (ii)의 경우는 동시에 일어나지 않으므로 나오는 눈의 수의 차가 2 또는 4인 경우의 수는

$8+4=12$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

9. [출제의도] 원과 접선의 성질을 이해하여 각의 크기를 구한다.



원의 중심을 O라 하자. 직선 PA와 직선 PB가 원의 접선이므로 $\angle PAO=\angle OBP=90°$

호 AB에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

$\angle AOB=2\times\angle ACB=2\times65°$

$=130°$

사각형 APBO의 내각의 크기의 합은 $360°$이므로

$\angle BPA+\angle PAO+\angle AOB+\angle OBP=360°$

$\angle BPA+90°+130°+90°=360°$

$\angle BPA=360°-90°-130°-90°$

$=50°$

10. [출제의도] 이차방정식의 근을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 값을 추론한다.

$(x-a)^2=27$

$x-a=\pm\sqrt{27}$

$x=a\pm\sqrt{27}$

두 근이 모두 양수이기 위해서는

$a+\sqrt{27}>0$이고 $a-\sqrt{27}>0$이어야 하므로

$a>\sqrt{27}$

$\sqrt{25}<\sqrt{27}<\sqrt{36}$이므로

$5<\sqrt{27}<6$

따라서 구하는 자연수 a의 최솟값은 6

11. [출제의도] 도수분포표와 유한소수의 성질을 이해하여 도수를 구한다.

도수의 총합이 45이므로 $7+11+a+10+b=45$

$a+b=17$ ······ ㉠

독서 시간이 10시간 이상 15시간 미만인 계급의 상대도수는 $\frac{a}{45}$이고, 상대도수가 0이 아니므로 $a>0$

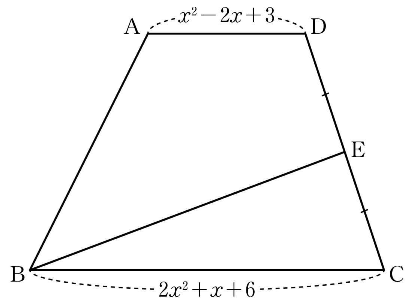
45를 소인수분해하면 $45=3^2\times5$

$\frac{a}{45}=\frac{a}{3^2\times5}$가 유한소수이기 위해서는 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 하므로 a는 9의 배수이다. ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=9$, $b=8$

따라서 $2a+b=2\times9+8=26$

12. [출제의도] 다항식의 연산을 이해하여 사각형의 넓이를 구한다.



사각형 ABED의 넓이는 두 삼각형 ABD, BED의 넓이의 합과 같다.

삼각형 ABD에서 밑변을 선분 AD라 하면 높이가 4이므로

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times4=\frac{1}{2}\times(x^2-2x+3)\times4$

$=2x^2-4x+6$ ······ ㉠

$\overline{DE}=\overline{CE}$이므로 $\triangle BED=\triangle BCE$

$\triangle BCD=\triangle BED+\triangle BCE=2\times\triangle BED$

삼각형 BCD에서 밑변을 선분 BC라 하면 높이가 4이므로

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times4=\frac{1}{2}\times(2x^2+x+6)\times4$

$=4x^2+2x+12$ ······ ㉡

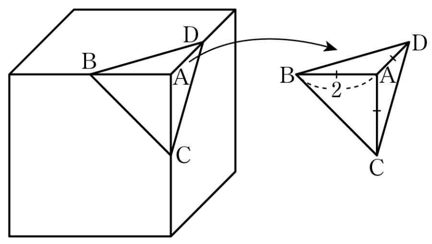
㉠, ㉡에서

$\square ABED=\triangle ABD+\triangle BED$

$=(2x^2-4x+6)+\frac{1}{2}(4x^2+2x+12)$

$=4x^2-3x+12$

13. [출제의도] 입체도형을 이해하여 주어진 입체도형의 부피를 구한다.



한 모서리의 길이가 4인 정육면체의 부피는 $4^3=64$

네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사면체는

$\overline{AB}=\overline{AD}=2$인 직각삼각형 ABD를 밑면으로 하고 높이가 2인 삼각뿔이다.

잘라 낸 사면체의 부피는 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)\times2=\frac{4}{3}$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$64-\frac{4}{3}=\frac{188}{3}$

14. [출제의도] 대푯값과 산포도를 이해하여 평균과 분산을 구한다.

과수원 B의 사과 6개의 당도의 평균은

$\frac{11+9+12+9+a+(a+1)}{6}=\frac{42+2a}{6}$

이고, 과수원 A의 사과 6개의 당도의 평균 11과 같으므로

$\frac{42+2a}{6}=11$, $a=12$

과수원 B의 사과 6개 각각의 당도는

11, 9, 12, 9, 12, 13

이 자료의 편차는 차례로

0, -2, 1, -2, 1, 2

$(\text{분산})=\dfrac{(\text{편차})^2\text{의 총합}}{(\text{변량})\text{의 개수}}$ 이므로

과수원 B의 사과 6개의 당도의 분산은

$\dfrac{0^2+(-2)^2+1^2+(-2)^2+1^2+2^2}{6}=\dfrac{14}{6}=\dfrac{7}{3}$

$b=\dfrac{7}{3}$

따라서 $a+b=12+\dfrac{7}{3}=\dfrac{43}{3}$

15. [출제의도] 일차부등식을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

온라인 서점 A에서 x권 주문할 때 지불하는 금액은

$12000x\times\left(1-\dfrac{5}{100}\right)$

온라인 서점 B에서 x권 주문할 때 지불하는 금액은

$12000x\times\left(1-\dfrac{10}{100}\right)+4000$

온라인 서점 A에 지불하는 금액이 온라인 서점 B에 지불하는 금액보다 커야 하므로

$12000x\times\left(1-\dfrac{5}{100}\right)>12000x\times\left(1-\dfrac{10}{100}\right)+4000$

이 부등식을 풀면

$3x\times\left(1-\dfrac{5}{100}\right)>3x\times\left(1-\dfrac{10}{100}\right)+1$

$3x\times\dfrac{95}{100}-3x\times\dfrac{90}{100}>1$

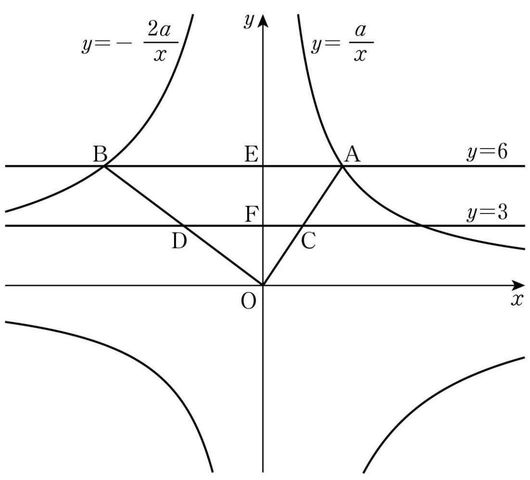
$3x\times\dfrac{5}{100}>1,\ \ \dfrac{3}{20}x>1$

$x>\dfrac{20}{3}$

$6<\dfrac{20}{3}<7$이므로 x가 7 이상이면 온라인 서점 A에서 주문할 때 지불하는 금액이 온라인 서점 B에서 주문할 때 지불하는 금액보다 더 크다.

따라서 x의 최솟값은 7

16. [출제의도] 삼각형의 닮음의 성질을 이해하여 상수의 값을 구한다.



두 직선 $y=6$, $y=3$이 y축과 만나는 점을 각각 E, F라 하자.

반비례 관계 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프와 직선 $y=6$이 만나는 점 A의 좌표가 $\left(\dfrac{a}{6},6\right)$이므로 $\overline{EA}=\dfrac{a}{6}$

반비례 관계 $y=-\dfrac{2a}{x}$의 그래프와 직선 $y=6$이 만나는 점 B의 좌표가 $\left(-\dfrac{a}{3},6\right)$이므로 $\overline{BE}=\dfrac{a}{3}$

그러므로 $\overline{BA}=\overline{BE}+\overline{EA}=\dfrac{a}{3}+\dfrac{a}{6}=\dfrac{a}{2}$

삼각형 DOC와 삼각형 BOA에서

각 COD는 공통이고, 두 직선 $y=3$, $y=6$이 서로 평행하므로 $\angle DCO=\angle BAO$

그러므로 두 삼각형은 서로 닮음이다.

평행선 사이의 선분의 길이의 비에서

$\overline{OF}:\overline{OE}=\overline{OC}:\overline{OA}=1:2$

이므로 삼각형 DOC와 삼각형 BOA의 닮음비는 $1:2$이고, 두 삼각형의 넓이의 비는 $1:4$이다.

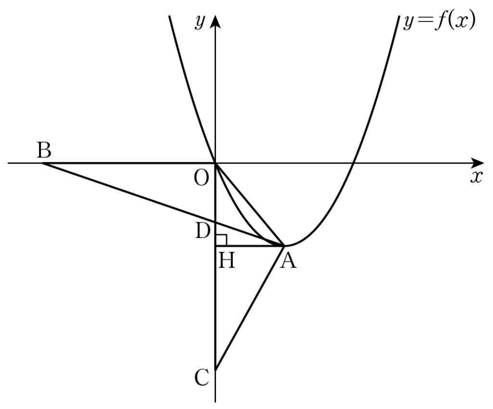
$\square ABDC=\triangle BOA-\triangle DOC=\triangle BOA-\dfrac{1}{4}\times\triangle BOA$

$\quad=\dfrac{3}{4}\times\triangle BOA=\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OE}\right)$

그러므로 $27=\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{2}\times6\right)$

따라서 $a=24$

17. [출제의도] 이차함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 구한다.



점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

삼각형 OCA에서 밑변을 선분 OC라 하면 높이가 $\overline{AH}$이므로

$\triangle OCA=\dfrac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\times6\times\overline{AH}$

$\quad=3\overline{AH}$

삼각형 OCA의 넓이가 6이므로 $\overline{AH}=2$

점 A는 제4사분면 위의 점이므로

점 A의 x좌표는 2 ……㉠

$\overline{OD}=a\ (0<a<6)$이라 하면

$\overline{DC}=6-a$

삼각형 OBD에서 밑변을 선분 OB라 하면 높이가 $\overline{OD}$이므로

$\triangle OBD=\dfrac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{OD}=\dfrac{1}{2}\times5\times a$

$\quad=\dfrac{5}{2}a$

삼각형 DCA에서 밑변을 선분 DC라 하면 높이가 $\overline{AH}$이므로

$\triangle DCA=\dfrac{1}{2}\times\overline{DC}\times\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\times(6-a)\times2$

$\quad=6-a$

$\triangle OBD=\triangle DCA$에서

$\dfrac{5}{2}a=6-a,\ \ a=\dfrac{12}{7}$

$\angle ODB=\angle HDA$ (맞꼭지각), $\angle BOD=\angle AHD$이므로 삼각형 OBD와 삼각형 HAD는 서로 닮음이다.

즉, $\overline{BO}:\overline{AH}=\overline{OD}:\overline{HD}$이므로 $5:2=\dfrac{12}{7}:\overline{HD}$

$\overline{HD}=\dfrac{1}{5}\times2\times\dfrac{12}{7}=\dfrac{24}{35}$

$\overline{OH}=\overline{OD}+\overline{HD}=\dfrac{12}{7}+\dfrac{24}{35}$

$\quad=\dfrac{12}{5}$

점 A는 제4사분면 위의 점이므로

점 A의 y좌표는 $-\dfrac{12}{5}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 점 A의 좌표는 $\left(2,-\dfrac{12}{5}\right)$이고, 이 점은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이므로

$f(x)=p(x-2)^2-\dfrac{12}{5}$ (p는 상수)

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점 O를 지나므로

$f(0)=p(0-2)^2-\dfrac{12}{5}$

$\quad=4p-\dfrac{12}{5}=0$

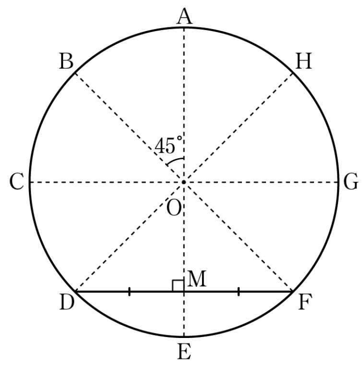
$p=\dfrac{3}{5}$에서 $f(x)=\dfrac{3}{5}(x-2)^2-\dfrac{12}{5}$

따라서

$f(10)=\dfrac{3}{5}(10-2)^2-\dfrac{12}{5}$

$\quad=36$

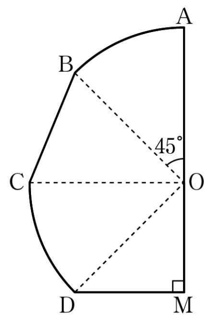
18. [출제의도] 평면도형의 성질과 삼각비를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.



점 A, B, C, D, E, F, G, H는 원의 둘레를 8등분하는 점이고, 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로 그림의 8개의 부채꼴의 중심각의 크기는 모두 45°이다.

원의 중심을 O라 하고, 선분 DF의 중점을 M이라 하면 직선 OM은 선분 DF를 수직이등분한다.

한편 모양의 도형의 넓이는 모양의 도형의 넓이의 2배와 같다.



부채꼴 AOB의 넓이를 S라 하면

(모양의 도형의 넓이)$=2S+\triangle OBC+\triangle ODM$

$S=\pi\times4^2\times\dfrac{45}{360}=2\pi\,(\text{cm}^2)$

$\triangle OBC=\dfrac{1}{2}\times4\times4\times\sin45^\circ=\dfrac{1}{2}\times4\times4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\quad=4\sqrt{2}\,(\text{cm}^2)$

직각삼각형 ODM에서 $\dfrac{\overline{DM}}{4}=\sin45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{DM}=2\sqrt{2}$

$\triangle ODM=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4\,(\text{cm}^2)$

(모양의 도형의 넓이)

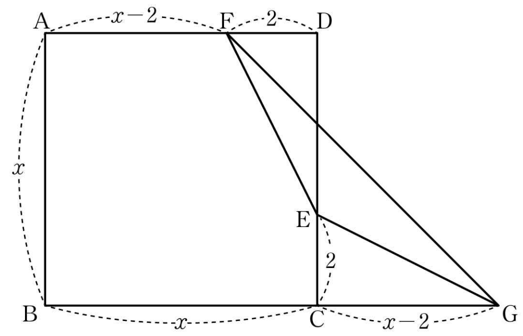
=(모양의 도형의 넓이)$\times2$

$=(2\times2\pi+4\sqrt{2}+4)\times2$

$=8\pi+8\sqrt{2}+8\,(\text{cm}^2)$

따라서 $a=8+8\pi+8\sqrt{2}$

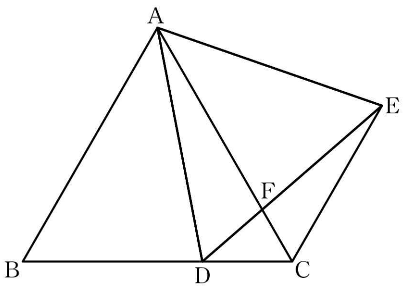
19. [출제의도] 삼각형의 합동을 이용하여 이차방정식의 해를 구하는 문제를 해결한다.



$\overline{AF}=\overline{AD}-\overline{FD}=x-2$

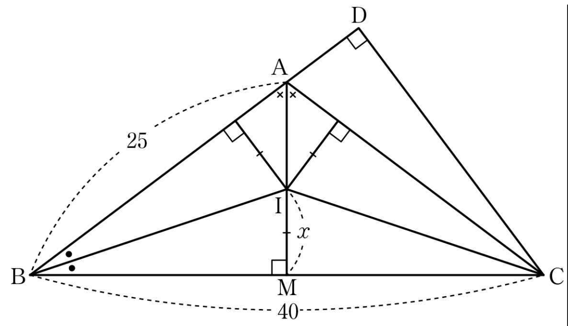
$\overline{BG}=\overline{BC}+\overline{CG}=x+(x-2)$
$=2x-2$
사각형 ABGF 는 두 밑변의 길이가 $\overline{AF}$, $\overline{BG}$ 이고, 높이가 x 인 사다리꼴이므로
$\square ABGF=\frac{1}{2}\times\{(x-2)+(2x-2)\}\times x=\frac{1}{2}\times(3x-4)\times x$
$=\frac{3}{2}x^2-2x$ ⋯⋯ ㉠
$\overline{DE}=\overline{CG}=x-2$, $\overline{FD}=\overline{EC}=2$ 이고
$\angle FDE=\angle ECG=90°$ 이므로 삼각형 FDE 와 삼각형 ECG 는 서로 합동이다.
오각형 ABCEF 의 넓이를 S 라 하면
$\square ABGF=S+\triangle ECG+\triangle EGF=S+\triangle FDE+\triangle EGF$
$=\square ABCD+\triangle EGF$
$=x^2+7$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡에서
$\frac{3}{2}x^2-2x=x^2+7$
$\frac{1}{2}x^2-2x-7=0$
$x^2-4x-14=0$
근의 공식에 의하여
$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times(-14)}}{2\times1}=\frac{4\pm\sqrt{72}}{2}$
$=2\pm3\sqrt{2}$
$x>4$ 이므로 $x=2+3\sqrt{2}$

20. [출제의도] 도형의 닮음을 이용하여 주어진 선분의 길이를 구하는 과정을 추론한다.

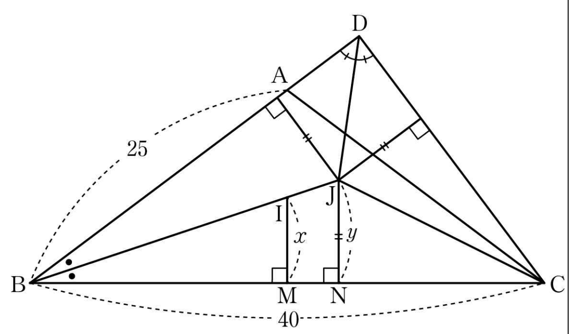


두 정삼각형 ABC, ADE 에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{AD}=\overline{AE}$ 이고,
$\angle BAD=60°-\angle DAC=\angle CAE$ 이므로 삼각형 ABD 와 삼각형 ACE 는 서로 합동이다.
그러므로 $\angle DBA=\angle ECA$, $\overline{BD}=\overline{CE}$ 이고,
$\angle DBA=60°$, $\overline{BD}=\overline{BC}-\overline{DC}=12-4=8$ 이므로
$\angle ECA=60°$, $\overline{CE}=\boxed{8}$
한편 각 AFD 와 각 CFE 는 서로 맞꼭지각이고,
$\angle FDA=\angle ECF$ 이므로
$\angle DAF=\angle FEC$
또한 $\angle ACD=\angle ECF$ 이므로 삼각형 ACD 와 삼각형 ECF 는 서로 닮은 도형이고,
삼각형 ACD 와 삼각형 ECF 의 닮음비는
$\overline{AC}:\overline{EC}=12:8=\boxed{3}:2$ 이다.
따라서
$\overline{CD}:\overline{CF}=3:2$, $\overline{CD}=4$ 에서 $3\overline{CF}=4\times2$, $\overline{CF}=\boxed{\frac{8}{3}}$
따라서 $p=8$, $q=3$, $r=\frac{8}{3}$ 에서
$p+q+r=\frac{41}{3}$

21. [출제의도] 삼각형의 내심의 성질과 제곱근을 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제를 해결한다.



삼각형 ABC 는 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각형이므로 각 BAC 의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다. 각 BAC 의 이등분선이 선분 BC 와 만나는 점을 M 이라 하면
$\overline{BM}=\overline{CM}=20$, $\angle AMB=90°$
직각삼각형 ABM 에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AB}^2=\overline{BM}^2+\overline{AM}^2$, $25^2=20^2+\overline{AM}^2$
$\overline{AM}^2=225$, $\overline{AM}=15$
점 I 는 삼각형 ABC 의 내심이므로 선분 AM 위에 있다.
두 삼각형 ABM, CBD 에서 각 MBA 는 공통이고
$\angle AMB=\angle CDB=90°$ 이므로 삼각형 ABM 과 삼각형 CBD 는 서로 닮음이다.
그러므로 $\overline{AB}:\overline{CB}=\overline{BM}:\overline{BD}$ 에서 $25:40=20:\overline{BD}$
$\overline{BD}=\frac{40\times20}{25}=32$
$\overline{AD}=\overline{BD}-\overline{BA}=32-25=7$
마찬가지로 $\overline{AB}:\overline{CB}=\overline{AM}:\overline{CD}$ 에서 $25:40=15:\overline{CD}$
$\overline{CD}=\frac{40\times15}{25}=24$
삼각형 ABC 의 내접원의 반지름의 길이를 x 라 하면 점 I 가 삼각형 ABC 의 내심이므로 점 I 에서 삼각형 ABC 의 세 변 AB, BC, CA 에 이르는 거리가 x 로 모두 같다.
세 삼각형 ABI, BCI, CAI 의 밑변을 각각 선분 AB, 선분 BC, 선분 CA 라 하면 높이는 모두 x 이므로
$\triangle ABC=\triangle ABI+\triangle BCI+\triangle CAI$
$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times x+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times x+\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times x$
$=\frac{1}{2}\times(25+40+25)\times x$
$=45x$
삼각형 ABC 에서 밑변을 선분 BC 라 하면 높이가 $\overline{AM}$ 이므로
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AM}$
$=\frac{1}{2}\times40\times15=300$
그러므로 $45x=300$ 에서 $x=\frac{20}{3}$

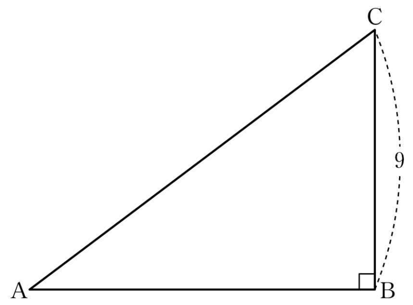


삼각형 DBC 의 내접원의 반지름의 길이를 y 라 하면 점 J 가 삼각형 DBC 의 내심이므로 점 J 에서 삼각형 DBC 의 세 변 DB, BC, CD 에 이르는 거리가 y 로 모두 같다.
세 삼각형 DBJ, BCJ, CDJ 의 밑변을 각각 선분 DB, 선분 BC, 선분 CD 라 하면 높이는 모두 y 이므로
$\triangle DBC=\triangle DBJ+\triangle BCJ+\triangle CDJ$
$=\frac{1}{2}\times\overline{DB}\times y+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times y+\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times y$
$=\frac{1}{2}\times(32+40+24)\times y$
$=48y$
삼각형 DBC 에서 밑변을 선분 BD 라 하면 높이가 $\overline{CD}$ 이므로
$\triangle DBC=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{CD}$
$=\frac{1}{2}\times32\times24=384$
그러므로 $48y=384$ 에서 $y=8$
직각삼각형 IBM 에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{IB}^2=\overline{BM}^2+\overline{IM}^2$
$=20^2+\left(\frac{20}{3}\right)^2=\frac{4000}{9}$
$\overline{IB}=\frac{20\sqrt{10}}{3}$
점 J 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 N 이라 하자.
두 삼각형 IBM, JBN 에서 각 MBI 는 공통이고,
$\angle IMB=\angle JNB=90°$ 이므로 삼각형 IBM 과 삼각형 JBN 은 서로 닮음이고, 그 닮음비는
$x:y=\frac{20}{3}:8=5:6$
$\overline{JB}=\frac{6}{5}\overline{IB}$ 이므로
$\overline{IJ}=\overline{JB}-\overline{IB}=\frac{6}{5}\overline{IB}-\overline{IB}=\frac{1}{5}\overline{IB}=\frac{1}{5}\times\frac{20\sqrt{10}}{3}$
따라서 $\overline{IJ}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$

22. [출제의도] 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하여 주어진 식의 값을 계산한다.

$y=x^2-2x+6=(x^2-2x+1)+5$
$=(x-1)^2+5$
이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,5)$
$a=1$, $b=5$
따라서 $a+b=6$

23. [출제의도] 삼각비를 이용하여 선분의 길이를 계산한다.

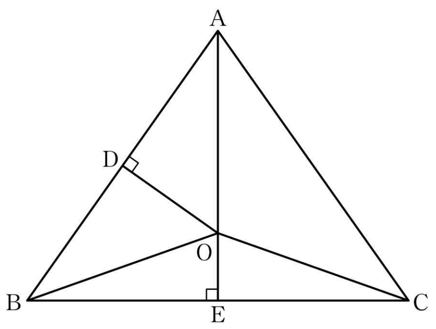


$\angle B=90°$ 인 직각삼각형 ABC 에서
$\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{9}{\overline{AC}}=\frac{3}{5}$
따라서 $\overline{AC}=15$

24. [출제의도] 소인수분해를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 값을 추론한다.

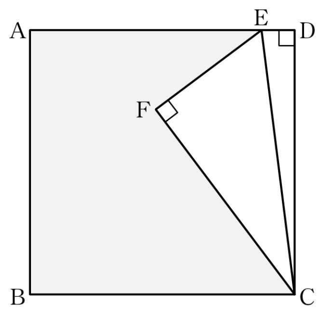
1265 를 소인수분해하면 $1265=5\times11\times23$
$m\times n=5\times11\times23$
m 이 두 자리의 수이므로 가능한 m 의 값은
11, 23, 55
(ⅰ) $m=11$ 이면 $n=5\times23=115$ 이므로 n 이 세 자리의 수가 되어 조건을 만족시킨다.
(ⅱ) $m=23$ 이면 $n=5\times11=55$ 이므로 n 이 두 자리의 수가 되어 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅲ) $m=55$ 이면 $n=23$ 이므로 n 이 두 자리의 수가 되어 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 두 자연수 m, n 의 값은 $m=11$, $n=115$
따라서 $m+n=11+115=126$

25. [출제의도] 삼각형의 외심의 성질을 이해하여 주어진 삼각형의 넓이를 구한다.



점 O는 삼각형 ABC의 외심이므로 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$
삼각형 OAB는 이등변삼각형이고, 점 O에서
선분 AB에 내린 수선의 발이 점 D이므로
직선 OD는 선분 AB를 수직이등분한다.
$\overline{AD}=\overline{BD}$이므로
$\triangle BDO=\triangle ADO=6$이 되어
$\triangle ABO=\triangle BDO+\triangle ADO=12$
두 삼각형 ABO, ACO에서
$\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{OB}=\overline{OC}$이고, 선분 OA는 공통이므로
삼각형 ABO와 삼각형 ACO는 서로 합동이 되어
$\triangle ABO=\triangle ACO=12$
$\overline{AO}=3\overline{OE}$이므로
$\triangle ABO=3\times\triangle OBE=12$, $\triangle OBE=4$
$\triangle ACO=3\times\triangle OCE=12$, $\triangle OCE=4$
따라서
$$\begin{aligned}\triangle ABC&=\triangle ABO+\triangle ACO+\triangle OBE+\triangle OCE\\&=12+12+4+4\\&=32\end{aligned}$$

26. [출제의도] 제곱근의 성질과 피타고라스 정리를 이해하여 주어진 도형의 둘레의 길이를 구한다.



$\overline{DE}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$\overline{AE}=\overline{AD}-\overline{ED}=4\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ …… ㉠

직각삼각형 ECD에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{EC}^2=\overline{ED}^2+\overline{DC}^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(4\sqrt{2})^2$

$=\dfrac{65}{2}$

직각삼각형 FCE에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{EC}^2=\overline{EF}^2+\overline{FC}^2$

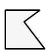
$\overline{EF}:\overline{FC}=4:7$에서 $\overline{EF}=\dfrac{4}{7}\overline{FC}$ 이므로

$\overline{EC}^2=\left(\dfrac{4}{7}\overline{FC}\right)^2+\overline{FC}^2$

$=\dfrac{65}{49}\times\overline{FC}^2$

$\dfrac{65}{49}\times\overline{FC}^2=\dfrac{65}{2}$에서 $\overline{FC}^2=\dfrac{49}{2}$

$\overline{FC}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ 이고 $\overline{EF}=\dfrac{4}{7}\overline{FC}=2\sqrt{2}$ …… ㉡

정사각형 ABCD에서
$\overline{AB}=\overline{BC}=4\sqrt{2}$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서
 모양의 도형의 둘레의 길이는
$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CF}+\overline{FE}+\overline{EA}$

$=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}+\dfrac{7\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}+\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

$=17\sqrt{2}$
$a=17\sqrt{2}$
따라서 $a^2=578$

27. [출제의도] 유리수의 연산을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 값을 추론한다.

네 수 중 서로 다른 두 수를 곱하여 나올 수 있는 값으로 가장 큰 수는 양수이다. 곱하여 양수가 되는 두 수는 모두 양수이거나 모두 음수이므로 a의 값은

$\dfrac{6}{5}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{4}{15}$ 와 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{8}$ 중 하나이다.

$\dfrac{4}{15}=\dfrac{32}{120}$, $\dfrac{3}{8}=\dfrac{45}{120}$ 에서 $\dfrac{4}{15}<\dfrac{3}{8}$ 이므로 $a=\dfrac{3}{8}$

네 수 중 서로 다른 두 수를 곱하여 나올 수 있는 값으로 가장 작은 수는 음수이다. 곱하여 음수가 되게 하는 두 수는 양수 하나와 음수 하나이다.
주어진 네 수를 절댓값이 큰 수부터 차례로 나열하면

$\dfrac{6}{5}$, $-\dfrac{3}{4}$, $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2}{9}$

음수는 절댓값이 클수록 수가 작아지므로 두 양수 중 절댓값이 큰 수인 $\dfrac{6}{5}$과 두 음수 중 절댓값이 큰 수인 $-\dfrac{3}{4}$의 곱이 b가 된다.

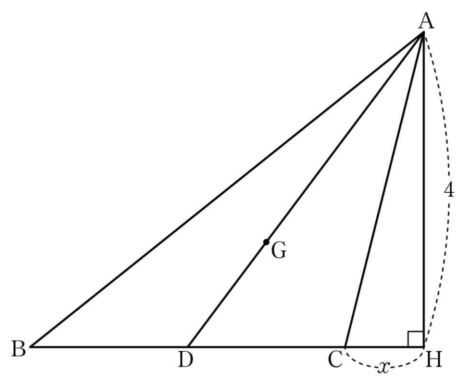
$b=\dfrac{6}{5}\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{9}{10}$

$a-b=\dfrac{3}{8}-\left(-\dfrac{9}{10}\right)=\dfrac{15+36}{40}$

$=\dfrac{51}{40}$

따라서 $120(a-b)=153$

28. [출제의도] 삼각형의 무게중심을 이용하여 선분의 길이와 삼각비의 값을 구하는 문제를 해결한다.



점 G가 삼각형 ABC의 무게중심이므로 점 D는 선분 BC의 중점이다.
그러므로 $\overline{BD}=\overline{DC}=2$
점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\triangle ADC=\dfrac{1}{2}\times\overline{DC}\times\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\times2\times\overline{AH}$

$=4$

$\overline{AH}=4$
$\overline{CH}=x$라 하면 $\overline{BH}=x+4$
직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리에 의하여
$\sqrt{41}^2=(x+4)^2+4^2$, $(x+4)^2=25$
$x>0$이므로 $x=1$, 즉 $\overline{CH}=1$
직각삼각형 ADH에서 $\overline{AD}^2=\overline{DH}^2+\overline{AH}^2$
$\overline{AD}^2=3^2+4^2=25$
$\overline{AD}=5$
점 G가 삼각형 ABC의 무게중심이므로
$\overline{AG}:\overline{DG}=2:1$

$\overline{DG}=\dfrac{1}{3}\times\overline{AD}=\dfrac{5}{3}$

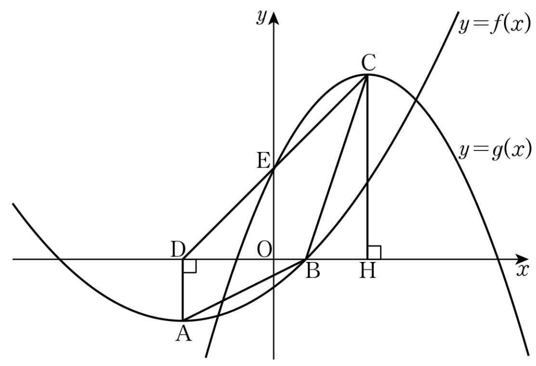
$\tan(\angle CDA)=\tan(\angle HDA)$

$=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{DH}}=\dfrac{4}{3}$

$\overline{DG}\times\tan(\angle CDA)=\dfrac{5}{3}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{20}{9}$

$p=9$, $q=20$
따라서 $p+q=29$

29. [출제의도] 이차함수의 그래프의 성질을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.



점 D는 점 A에서 x축에 내린 수선의 발이므로 점 D의 좌표는 $(-3,\ 0)$
$\overline{DB}=\overline{DO}+\overline{OB}=3+1=4$
삼각형 DAB에서 밑변을 선분 DB라 하면 높이가 $\overline{DA}$이므로

$\triangle DAB=\dfrac{1}{2}\times\overline{DB}\times\overline{DA}=\dfrac{1}{2}\times4\times a$

$=2a$

삼각형 CDB에서 밑변을 선분 DB라 하면 높이가 $3a$이므로

$\triangle CDB=\dfrac{1}{2}\times\overline{DB}\times3a=\dfrac{1}{2}\times4\times3a$

$=6a$

$\square ABCD=\triangle DAB+\triangle CDB=2a+6a$
$=8a$
$\square ABCD=16$이므로
$a=2$
점 A의 좌표는 $(-3,\ -2)$이고 점 C의 좌표는 $(3,\ 6)$
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이 점 A이므로
$f(x)=p(x+3)^2-2$ (p는 상수)
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $B(1,\ 0)$을 지나므로
$f(1)=p(1+3)^2-2=16p-2=0$

$p=\dfrac{1}{8}$

$f(x)=\dfrac{1}{8}(x+3)^2-2$

$f(-1)=\dfrac{1}{8}(-1+3)^2-2$

$=-\dfrac{3}{2}$ …… ㉠

선분 CD가 y축과 만나는 점을 E라 하고, 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.
두 삼각형 EDO, CDH에서 각 ODE는 공통이고, $\angle EOD=\angle CHD=90^\circ$이므로 삼각형 EDO와 삼각형 CDH는 서로 닮음이다.
$\overline{DO}:\overline{DH}=\overline{EO}:\overline{CH}$에서 $3:6=\overline{EO}:6$
$\overline{EO}=3$
점 E의 좌표는 $(0,\ 3)$
이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 꼭짓점이 점 C이므로
$g(x)=q(x-3)^2+6$ (q는 상수)
이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $E(0,\ 3)$을 지나므로
$g(0)=q(0-3)^2+6$
$=9q+6=3$

$q=-\dfrac{1}{3}$

$g(x)=-\dfrac{1}{3}(x-3)^2+6$

$g(-3)=-\dfrac{1}{3}(-3-3)^2+6$

$=-6$ …… ㉡

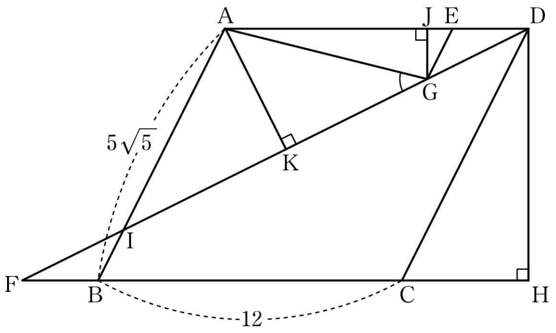
따라서 ㉠, ㉡에서

$f(-1)\times g(-3)=\left(-\dfrac{3}{2}\right)\times(-6)$

$=9$

30. [출제의도] 삼각형의 닮음과 피타고라스 정리를 이

용하여 삼각비의 값을 구하는 문제를 해결한다.



점 D에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\square ABCD = \overline{BC}\times\overline{DH} = 12\times\overline{DH}$

$= 120$

$\overline{DH} = 10$

사각형 ABCD가 평행사변형이므로

$\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AB} = \overline{DC}$

직각삼각형 DCH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{CD}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{DH}^2$, $(5\sqrt{5})^2 = \overline{CH}^2 + 10^2$

$\overline{CH}^2 = 125 - 100 = 25$, $\overline{CH} = 5$

$\overline{AE} = 3\overline{ED}$이므로

$\overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED} = 3\overline{ED} + \overline{ED}$

$= 4\overline{ED} = 12$

$\overline{ED} = 3$

$\overline{BF} = \overline{ED}$이므로 $\overline{BF} = 3$

$\overline{FH} = \overline{FB} + \overline{BC} + \overline{CH} = 3 + 12 + 5 = 20$

직각삼각형 DFH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{DF}^2 = \overline{FH}^2 + \overline{DH}^2 = 20^2 + 10^2 = 500$

$\overline{DF} = 10\sqrt{5}$

선분 AB가 선분 DF와 만나는 점을 I라 하자.

$\overline{AB} /\!/ \overline{EG}$이므로 $\angle DEG = \angle DAB$ (동위각)이고,

$\overline{AD} /\!/ \overline{FC}$이므로 $\angle DAB = \angle FBI$ (엇각)

그러므로 $\angle DEG = \angle FBI$

삼각형 EGD와 삼각형 BIF에서

$\angle DEG = \angle FBI$, $\overline{DE} = \overline{FB} = 3$, $\angle EDG = \angle BFI$ (엇각)이므로 두 삼각형은 서로 합동이다.

삼각형 EGD와 삼각형 AID에서

각 EDG는 공통이고, $\angle DGE = \angle DIA$ (동위각)이므로 두 삼각형은 서로 닮음이다.

$\overline{DE} : \overline{DA} = 3 : 12 = 1 : 4$이므로

삼각형 EGD와 삼각형 AID의 닮음비는 $1 : 4$이다.

$\overline{FI} = \overline{GD} = x$라 하면 $\overline{ID} = 4x$이므로

$\overline{FD} = \overline{FI} + \overline{ID} = 5x = 10\sqrt{5}$

$x = 2\sqrt{5}$, 즉 $\overline{FI} = \overline{GD} = 2\sqrt{5}$

$\overline{IB} = \overline{EG} = y$라 하면 $\overline{AI} = 4y$이므로

$\overline{AB} = \overline{AI} + \overline{IB} = 5y = 5\sqrt{5}$

$y = \sqrt{5}$, 즉 $\overline{IB} = \overline{EG} = \sqrt{5}$

점 G에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 J라 하자.

$\overline{GE} /\!/ \overline{CD}$이므로 $\angle JEG = \angle ADC$ (동위각)이고,

$\overline{AD} /\!/ \overline{CH}$이므로 $\angle ADC = \angle HCD$ (엇각)

그러므로 $\angle JEG = \angle HCD$

삼각형 GEJ와 삼각형 DCH에서 $\angle JEG = \angle HCD$

$\angle GJE = \angle DHC = 90^\circ$이므로 두 삼각형은 서로 닮음이다.

$\overline{GE} : \overline{DC} = \sqrt{5} : 5\sqrt{5} = 1 : 5$이므로

삼각형 GEJ와 삼각형 DCH의 닮음비는 $1 : 5$이다.

$\overline{EJ} : \overline{CH} = \overline{EJ} : 5 = 1 : 5$에서 $\overline{EJ} = 1$

$\overline{GJ} : \overline{DH} = \overline{GJ} : 10 = 1 : 5$에서 $\overline{GJ} = 2$

$\overline{AJ} = \overline{AD} - \overline{ED} - \overline{JE} = 12 - 3 - 1 = 8$

직각삼각형 AGJ에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AG}^2 = \overline{GJ}^2 + \overline{AJ}^2 = 2^2 + 8^2 = 68$

$\overline{AG} = 2\sqrt{17}$

점 A에서 선분 DF에 내린 수선의 발을 K라 하면

삼각형 ADK와 삼각형 DFH에서

$\angle ADK = \angle DFH$ (엇각), $\angle DKA = \angle FHD = 90^\circ$이므로

두 삼각형은 서로 닮음이다.

$\overline{AK} : \overline{DH} = \overline{AD} : \overline{DF}$에서 $\overline{AK} : 10 = 12 : 10\sqrt{5}$이므로

$\overline{AK} = \dfrac{120}{10\sqrt{5}} = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$

직각삼각형 AGK에서

$\sin(\angle AGK) = \dfrac{\overline{AK}}{\overline{AG}} = \dfrac{12\sqrt{5}}{5} \times \dfrac{1}{2\sqrt{17}}$

$= \dfrac{12\sqrt{5}}{5} \times \dfrac{\sqrt{17}}{34}$

$= \dfrac{6}{85}\sqrt{85}$

$\angle AGF = \angle AGK$이므로 $\sin(\angle AGF) = \dfrac{6}{85}\sqrt{85}$

따라서 $p = 85$, $q = 6$에서 $p + q = 91$