

■ [공통: 수학 I·수학 II]

01. ⑤ 02. ④ 03. ⑤ 04. ② 05. ④
06. ⑤ 07. ③ 08. ① 09. ④ 10. ③
11. ② 12. ① 13. ⑤ 14. ④ 15. ②
16. 7 17. 33 18. 96 19. 41
20. 36 21. 16 22. 64

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{5} \times 25^{\frac{1}{3}} &= 5^{\frac{1}{3}} \times (5^2)^{\frac{1}{3}} \\ &= 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \\ &= 5^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} \\ &= 5^1 = 5 \end{aligned}$$

정답 ⑤

2. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 8 \text{이므로} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= f'(2) \\ &= 3 \times 2^2 - 8 \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ④

3. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 이용하여 양수 k 의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비가 모두 양수 k 이므로

$$a_n = k^n$$

$$\frac{a_4}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = 30 \text{에서}$$

$$\frac{k^4}{k^2} + \frac{k^2}{k} = 30$$

$$k^2 + k = 30$$

$$k^2 + k - 30 = 0$$

$$(k+6)(k-5) = 0$$

$$k > 0 \text{이므로}$$

$$k = 5$$

정답 ⑤

4. 출제의도 : 함수의 연속의 정의를 이해하고 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = -2$ 에서 연속이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (5x + a) = -10 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 - a) = 4 - a$$

$$f(-2) = 4 - a$$

이므로

$-10 + a = 4 - a$, $a = 7$
따라서 상수 a 의 값은 7이다.

정답 ②

5. 출제의도 : 함수의 곱의 미분법을 사용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$$f(x) = (x^2 + 1)(3x^2 - x) \text{에서}$$

$$f'(x) = 2x \times (3x^2 - x) + (x^2 + 1) \times (6x - 1)$$

따라서

$$f'(1) = 2 \times 2 + 2 \times 5 = 14$$

정답 ④

6. 출제의도 : 삼각함수의 성질을 이해하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{5} \text{에서}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{5}$$

따라서

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 정적분으로 정의된 함수를 이해하고 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\int_0^x f(t) dt = 3x^3 + 2x \text{의 양변을 } x \text{에 대해}$$

미분하면

$$f(x) = 9x^2 + 2$$

따라서

$$f(1) = 9 \times 1^2 + 2 = 11$$

정답 ③

8. 출제의도 : 로그의 정의와 성질을 이용하여 값을 간단히 나타낼 수 있는가?

풀이 :

$$a = 2 \log \frac{1}{\sqrt{10}} + \log_2 20$$

$$= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \log 10 + \log_2 2 + \log_2 10$$

$$= -1 + 1 + \log_2 10 = \log_2 10$$

$$a \times b = \log_2 10 \times \log 2 = 1$$

정답 ①

9. 출제의도 : 정적분의 정의와 성질을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\int_{-2}^a f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \dots\dots \textcircled{A}$$

ⓐ의 좌변은 정적분의 성질을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{-2}^a f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

그러므로 ⓐ에서

$$\int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx$$

$$\text{즉, } \int_0^a f(x)dx = 0$$

이때

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x)dx &= \int_0^a (3x^2 - 16x - 20)dx \\ &= \left[x^3 - 8x^2 - 20x \right]_0^a \\ &= a^3 - 8a^2 - 20a \end{aligned}$$

이므로

$$a^3 - 8a^2 - 20a = 0 \text{에서}$$

$$a(a^2 - 8a - 20) = 0$$

$$a(a+2)(a-10) = 0$$

따라서 양수 a 의 값은 10이다.

정답 ④

10. 출제의도 : 코사인함수의 최댓값과 주기를 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x) = a\cos bx + 3$ 의 그래프는 함수 $y = a\cos bx$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 것이다.

a 가 자연수이므로

$$f(0) \geq f(x)$$

이다.

한편, 함수 $y = a\cos bx + 3$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{b}$$

단한구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$

가 $x = \frac{\pi}{3}$ 에서 최댓값 13을 가지므로

$$a + 3 = 13 \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\frac{2\pi}{b} \leq \frac{\pi}{3} \dots\dots \textcircled{C}$$

이어야 한다.

ⓑ에서

$$a = 10$$

ⓒ에서

$$b \geq 6$$

따라서 $a+b$ 의 최솟값은 $b=6$ 일 때

$$10 + 6 = 16$$

정답 ③

11. 출제의도 : 속도와 가속도를 구할 수 있는가?

풀이 :

점 P의 시각 t 에서의 속도와 가속도를 각각 v , a 라 하면

$$v = x' = 3t^2 - 3t - 6$$

$$a = v' = 6t - 3$$

이때 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각은

$$v = 3t^2 - 3t - 6 = 3(t-2)(t+1) = 0$$

에서

$$t = 2$$

따라서 $t=2$ 에서 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 구하는 가속도는

$$6 \times 2 - 3 = 9$$

정답 ②

12. 출제의도 : 시그마의 성질을 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{2}n^2 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

①에 $n=1$ 을 대입하면

$$\frac{a_1}{b_2} = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = 2 \text{이므로 } b_2 = 4$$

등차수열 $\{b_n\}$ 에서 $b_1 = 2$, $b_2 = 4$ 이므로 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이다.

$$\text{즉, } b_n = 2n$$

한편, ①의 양변에 n 대신 $n-1$ 을 대입하면

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{2}(n-1)^2 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

①-②을 하면

$$\frac{a_n}{b_{n+1}} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}(n-1)^2 = n - \frac{1}{2}$$

$$b_{n+1} = 2(n+1) \text{이므로}$$

$$a_n = 2(n+1) \left(n - \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2n^2 + n - 1 \quad (n \geq 2)$$

이 때, $a_1 = 2$ 이므로

$$a_n = 2n^2 + n - 1$$

따라서

$$\sum_{k=1}^5 a_k = \sum_{k=1}^5 (2k^2 + k - 1)$$

$$= 2 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + \frac{5 \times 6}{2} - 1 \times 5$$

$$= 120$$

정답 ①

13. 출제의도 : 정적분을 활용하여 두 곡선 사이의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $f(1) = f(2) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-k) \quad (k \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

이때,

$$f'(x) = (x-2)(x-k) + (x-1)(x-k) + (x-1)(x-2)$$

이고, $f'(0) = -7$ 이므로

$$2k + k + 2 = -7$$

즉, $k = -3$ 이므로

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$$

이고, $f(3) = 12$ 이므로 점 P의 좌표는

$$P(3, 12)$$

따라서 직선 OP의 방정식은 $y = 4x$ 이므로

$$\begin{aligned}
B-A &= \int_0^3 \{4x - f(x)\} dx \\
&= \int_0^3 \{4x - (x^3 - 7x + 6)\} dx \\
&= \int_0^3 (-x^3 + 11x - 6) dx \\
&= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{11}{2}x^2 - 6x \right]_0^3 \\
&= -\frac{1}{4} \times 81 + \frac{11}{2} \times 9 - 6 \times 3 \\
&= \frac{45}{4}
\end{aligned}$$

정답 ⑤

[참고]

점 Q의 x좌표를 a라 하면

$$\begin{aligned}
B-A &= \int_a^3 \{4x - f(x)\} dx - \int_0^a \{f(x) - 4x\} dx \\
&= \int_a^3 \{4x - f(x)\} dx + \int_0^a \{4x - f(x)\} dx \\
&= \int_0^3 \{4x - f(x)\} dx
\end{aligned}$$

14. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

풀이 :

원 O의 반지름의 길이를 r이라 하면

$$\overline{AD} = \overline{AE} = r$$

이고 $\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 2$ 이므로

$$\overline{BD} = \frac{2}{3}r$$

또한 $\overline{CE} = x$ 라 하면 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이가 각각

$$\frac{1}{2} \times r \times r \times \sin A = \frac{1}{2} r^2 \sin A$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{3}r \times (r+x) \times \sin A = \frac{5}{6} r(r+x) \sin A$$

이고 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 9 : 35이므로

$$\frac{1}{2} r^2 \sin A : \frac{5}{6} r(r+x) \sin A = 9 : 35$$

$$3r + 3x = 7r, \quad x = \frac{4}{3}r$$

이때 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}$$

이고

$$\overline{AB} = \frac{5}{3}r, \quad \sin A : \sin C = 8 : 5$$

이므로

$$\begin{aligned}
\overline{BC} &= \overline{AB} \times \frac{\sin A}{\sin C} \\
&= \frac{5}{3}r \times \frac{8}{5}
\end{aligned}$$

$$= \frac{8}{3}r$$

$\angle ACB = \theta$ 라 하면 삼각형 ABC에서
코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{\left(\frac{8}{3}r\right)^2 + \left(\frac{7}{3}r\right)^2 - \left(\frac{5}{3}r\right)^2}{2 \times \frac{8}{3}r \times \frac{7}{3}r}$$

$$= \frac{11}{14}$$

이므로

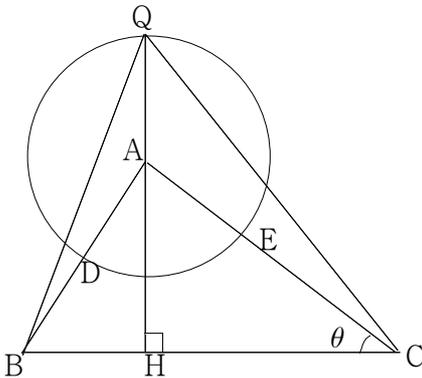
$$\begin{aligned} \sin\theta &= \sqrt{1 - \cos^2\theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{14} \end{aligned}$$

또한 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의
길이가 7이므로

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\theta} = 2 \times 7, \text{ 즉 } \frac{5}{3}r = 14 \text{ 에서}$$

$$\frac{5}{3}r = 14\sin\theta = 14 \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = 5\sqrt{3}$$

$$r = 3\sqrt{3}$$



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을
H라 하면

$$\overline{AH} = \overline{AC}\sin\theta$$

$$= \frac{7}{3}r\sin\theta$$

$$= \frac{7}{3} \times 3\sqrt{3} \times \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$= \frac{15}{2}$$

따라서 직선 AH와 원 O가 만나는 점
중 삼각형 ABC의 외부의 점을 Q라
하면, 삼각형 PBC의 넓이가 최대일
때는 점 P가 점 Q의 위치에 있을
때이다.

이때

$$\begin{aligned} \overline{QH} &= r + \overline{AH} \\ &= 3\sqrt{3} + \frac{15}{2} \end{aligned}$$

이므로 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times 3\sqrt{3} \times \left(3\sqrt{3} + \frac{15}{2}\right) \\ &= 36 + 30\sqrt{3} \end{aligned}$$

정답 ④

15. 출제의도 : 함수의 미분가능과 함수
의 극대, 극소 및 그래프를 이용하여 함
수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$$g(0) = 7$$

$x < 0$ 일 때,

$$g'(x) = 3x^2 + 2ax + 15$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = 15$$

조건 (가)에서 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의
집합에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 15$$

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를

$p(p < 0)$ 라 하면

$$f(x) = px^2 + 15x + 7$$

$$f'(x) = 2px + 15$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$2px + 15 = 0$$

$$x = -\frac{15}{2p}$$

이때, $p < 0$ 이므로

$$-\frac{15}{2p} > 0$$

조건 (나)에서

x 에 대한 방정식 $g'(x) \times g'(x-4) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로

함수 $g(x)$ 는 $x < 0$ 에서 극댓값과 극솟값을 가져야 한다.

즉, $x < 0$ 에서

방정식 $g'(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근

$$\alpha, \beta (\alpha < \beta < 0)$$

를 갖고,

$$\beta = \alpha + 4, \quad -\frac{15}{2p} = \beta + 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이어야 한다.

이차방정식 $3x^2 + 2ax + 15 = 0$ 의 서로 다른 두 실근이 $\alpha, \alpha + 4$ 이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha + 4) = -\frac{2a}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\alpha(\alpha + 4) = 5 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 에서

$$\alpha^2 + 4\alpha - 5 = 0$$

$$(\alpha + 5)(\alpha - 1) = 0$$

$\alpha < 0$ 이므로

$$\alpha = -5$$

$\alpha = -5$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-5 + (-5 + 4) = -\frac{2a}{3}$$

$$a = 9$$

$\alpha = -5$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\beta = -5 + 4 = -1$$

$$-\frac{15}{2p} = -1 + 4$$

$$p = -\frac{5}{2}$$

따라서

$$g(-2) = (-2)^3 + 9 \times (-2)^2 + 15 \times (-2) + 7 = 5$$

$$g(2) = -\frac{5}{2} \times 2^2 + 15 \times 2 + 7 = 27$$

이므로

$$g(-2) + g(2) = 5 + 27 = 32$$

정답 ②

16. 출제의도 : 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는가?

풀이 :

로그의 진수의 조건에 의해

$$x - 3 > 0, \quad 3x - 5 > 0$$

$$\text{즉, } x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_2(x - 3) = \log_4(3x - 5) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때

$$\log_2(x-3) = \log_{2^2}(x-3)^2 = \log_4(x-3)^2$$

이므로 ㉠에서

$$\log_4(x-3)^2 = \log_4(3x-5)$$

즉, $(x-3)^2 = 3x-5$ 에서

$$x^2 - 6x + 9 = 3x - 5$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$(x-2)(x-7) = 0$$

따라서 ㉠에 의해 $x = 7$

정답 7

$$= \sum_{n=1}^4 12 = 12 \times 4 = 48$$

$$\sum_{n=9}^{16} a_n = \sum_{n=9}^{12} (a_n + a_{n+4})$$

$$= \sum_{n=9}^{12} 12 = 12 \times 4 = 48$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{16} a_n = \sum_{n=1}^4 (a_n + a_{n+4}) + \sum_{n=9}^{12} (a_n + a_{n+4})$$

$$= 48 + 48 = 96$$

정답 96

17. 출제의도 : 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (9x^2 + 4x) dx$$

$$= 3x^3 + 2x^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

이때 $f(1) = 6$ 이므로 $C = 1$

따라서 $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$ 이므로

$$f(2) = 24 + 8 + 1 = 33$$

정답 33

18. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$a_n + a_{n+4} = 12 \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^8 a_n = \sum_{n=1}^4 (a_n + a_{n+4})$$

19. 출제의도 : 삼차함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$f(x) = 2x^3 - 3ax^2 - 12a^2x \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6ax - 12a^2$$

$$= 6(x+a)(x-2a)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -a \text{ 또는 } x = 2a$$

$a > 0$ 이므로

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	\cdots	$-a$	\cdots	$2a$	\cdots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

함수 $f(x)$ 는 $x = -a$ 에서 극댓값을 갖고, $x = 2a$ 에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$ 의 극댓값이 $\frac{7}{27}$ 이고

$$f(-a) = -2a^3 - 3a^3 + 12a^3 = 7a^3$$

이므로

$$7a^3 = \frac{7}{27} \text{에서}$$

$$a^3 = \frac{1}{27}$$

$a > 0$ 이므로

$$a = \frac{1}{3}$$

따라서

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - \frac{4}{3}x$$

이므로

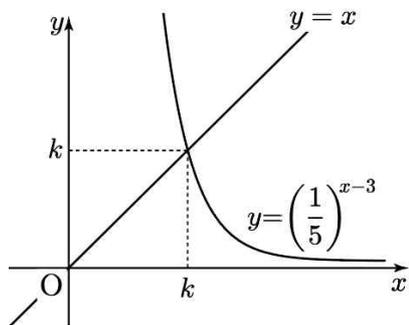
$$f(3) = 54 - 9 - 4 = 41$$

정답 41

20. 출제의도 : 지수의 성질과 지수함수의 그래프를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 과 직선 $y = x$ 는 다음 그림과 같다.



$x > k$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(f(x)) = 3x$ ㉠

곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 과 직선 $y = x$ 가 만나는

점의 x 좌표가 k 이므로

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3} = k$$

즉, $\left(\frac{1}{5}\right)^k \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = k$ 에서

$$k \times 5^k = 5^3$$

그러므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right) &= f\left(\left(\frac{1}{k \times 5^k}\right)^3\right) \\ &= f\left(\left(\frac{1}{5^3}\right)^3\right) \\ &= f\left(\frac{1}{5^9}\right) \end{aligned} \quad \dots \text{㉡}$$

한편,

$x > k$ 에서 $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 이므로

k 보다 작은 임의의 두 양수 y_1, y_2 ($y_1 < y_2$)에 대하여

$$f(x_1) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x_1-3} = y_1$$

$$f(x_2) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x_2-3} = y_2$$

인 x_1, x_2 ($k < x_2 < x_1$)이 존재한다.

㉡에서

$$f(f(x_1)) = 3x_1, f(f(x_2)) = 3x_2$$

이므로

$$f(f(x_1)) > f(f(x_2))$$

즉, $f(y_1) > f(y_2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x < k$ 에서 감소한다.

$x > k$ 에서 $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 이므로 함수

$f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

그러므로 ㉡에서

$$f(\alpha) = \frac{1}{5^9}$$

인 실수 α ($\alpha > k$)가 존재한다.

이때

$$f(\alpha) = \left(\frac{1}{5}\right)^{\alpha-3} = \frac{1}{5^9}$$

에서

$$\alpha - 3 = 9, \text{ 즉 } \alpha = 12$$

따라서 ㉠에 의해 구하는 값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right) &= f\left(\frac{1}{5^9}\right) \\ &= f(f(\alpha)) \\ &= 3\alpha \\ &= 3 \times 12 \\ &= 36 \end{aligned}$$

정답 36

21. 출제의도 : 함수의 극한에 대한 조건이 주어졌을 때 미정계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + 4 = 0$ 은 적어도 하나의 실근을 가지므로 $f(\beta) = 0$ 인 실수 β 가 존재한다.

모든 실수 α 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(2x+1)}{f(x)}$ 의

값이 존재하므로 $f(\beta) = 0$ 인 β 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = 0 \text{이고, } \lim_{x \rightarrow \beta} f(2x+1) = 0$$

함수 $f(x)$ 는 연속이므로 $f(2\beta+1) = 0$

즉 $2\beta+1$ 은 방정식 $f(x) = 0$ 의 근이다.

마찬가지 방법으로 $2\beta+1$ 이 방정식

$f(x) = 0$ 의 근이면 $2(2\beta+1)+1 = 4\beta+3$

도 방정식 $f(x) = 0$ 근이고

$2(4\beta+3)+1 = 8\beta+7$ 도 방정식 $f(x) = 0$

의 근이다.

만약 $\beta \neq 2\beta+1$, 즉 $\beta \neq -1$ 이면

$\beta, 2\beta+1, 4\beta+3, 8\beta+7$ 가 방정식

$f(x) = 0$ 의 서로 다른 네 근이다.

그러므로 방정식 $f(x) = 0$ 는 $x = -1$ 만 실근으로 갖는다.

$f(-1) = 0$ 에서

$$f(-1) = -1 + a - b + 4 = 0$$

$$b = a + 3$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + (a+3)x + 4$$

$$= (x+1)\{x^2 + (a-1)x + 4\}$$

$f(x) \neq (x+1)^3$ 이므로

이차방정식 $x^2 + (a-1)x + 4 = 0$ 의 실근은 존재하지 않는다.

위의 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때

$$D = (a-1)^2 - 16 < 0$$

$$a^2 - 2a - 15 < 0$$

$$(a+3)(a-5) < 0$$

$$-3 < a < 5$$

$$f(1) = a + b + 5 = a + (a+3) + 5 = 2a + 8$$

에서 $f(1)$ 의 최댓값은 $a = 4$ 일 때,

$$2 \times 4 + 8 = 16$$

정답 16

22. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하여 첫째항의 절댓값을 추론할 수 있는가?

풀이 :

조건 (나)에서 $|a_m| = |a_{m+2}|$ 를 만족시키

는 자연수 m 의 최솟값이 3이므로 다음

의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $|a_3|$ 이 홀수인 경우

$a_4 = a_3 - 3$ 이고 짝수이다.

$$a_5 = \frac{1}{2}a_4 = \frac{1}{2}(a_3 - 3)$$

$$|a_3| = |a_5| \text{에서}$$

$$|a_3| = \left| \frac{1}{2}(a_3 - 3) \right|$$

$$a_3 = 1 \text{ 또는 } a_3 = -3$$

$a_3 = 1$ 이면 $a_4 = -2$ 이고 1은 홀수이므로

a_2 는 짝수이고 $a_2 = 2$ 이므로 $|a_2| = |a_4|$

가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$a_3 = -3$ 이면 $a_4 = -6$ 이고 $a_2 = -6$ 이므로

$|a_2| = |a_4|$ 가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $|a_3|$ 이 0 또는 짝수인 경우

a_3	a_4	a_5
a_3	$\frac{1}{2}a_3$	$\frac{1}{2}a_3 - 3$
		$\frac{1}{4}a_3$

$$|a_3| = \left| \frac{1}{4}a_3 \right| \text{에서 } a_3 = 0$$

$a_3 = 0$ 이면 3 이상의 모든 자연수 m 에 대하여 $a_m = 0$ 이고 a_2, a_1 은 다음과 같다.

a_3	a_2	a_1
0	3	6
	0	

$a_2 = 0$ 이면 $|a_2| = |a_4|$ 가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않으므로, 이때의 조건을 만족시키는 a_1 의 값은 6이다.

$$\text{한편, } |a_3| = \left| \frac{1}{2}a_3 - 3 \right| \text{에서}$$

$$a_3 = 2 \text{ 또는 } a_3 = -6$$

$a_3 = 2$ 이면 $a_4 = 1$ 이고 a_2, a_1 은 다음과 같다.

a_3	a_2	a_1
2	5	10
	4	7
		8

이때 조건을 만족시키는 a_1 의 값은 10, 7, 8이다.

$a_3 = -6$ 이면 $a_4 = -3$ 이고 a_2, a_1 은 다음과 같다.

a_3	a_2	a_1
-6	-3	
	-12	-9
		-24

$a_2 = -3$ 이면 $|a_2| = |a_4|$ 가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않으므로, 이때의 조건을 만족시키는 a_1 의 값은 -9, -24이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $|a_1|$ 의 값의 합은

$$6 + (10 + 7 + 8) + (9 + 24) = 64$$

정답 64

■ [선택: 기하]

23. ③ 24. ④ 25. ③ 26. ① 27. ①
28. ④ 29. 107 30. 316

23. 출제의도 : 성분으로 나타내어진 벡터의 연산을 할 수 있는가?

풀이 :

$$\vec{a} = (k, 3), \vec{b} = (1, 2) \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} + 3\vec{b} &= (k, 3) + (3, 6) \\ &= (k+3, 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이고, } \vec{a} + 3\vec{b} &= (6, 9) \text{이므로} \\ (k+3, 9) &= (6, 9) \end{aligned}$$

따라서

$$k+3=6$$

이므로

$$k=3$$

정답 ③

24. 출제의도 : 포물선의 정의를 이용하여 포물선 위의 점의 좌표를 구할 수 있는가?

풀이 :

포물선의 꼭짓점의 좌표가 (1, 0)이고 준선이 직선 $x = -1$ 이므로 초점의 좌표는 (3, 0)이다.

이때 포물선 위의 점 (3, a)에서 포물선의 초점까지의 거리와 준선까지의 거리

가 같으므로

$$\sqrt{0^2 + a^2} = |3 - (-1)|$$

$$a^2 = 16$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 4$$

정답 ④

[다른 풀이]

포물선의 꼭짓점 (1, 0)에서 준선 $x = -1$ 까지의 거리가 2이므로 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4 \times 2(x-1)$$

$$\text{즉, } y^2 = 8(x-1)$$

이다.

이 포물선이 점 (3, a)를 지나므로

$$a^2 = 8(3-1) = 16$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 4$$

25. 출제의도 : 좌표공간에서 선분을 내분하는 점과 외분하는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

풀이 :

선분 AB를 3:2로 내분하는 점을 P라 하면 점 P가 z축 위에 있으므로 x좌표와 y좌표가 모두 0이다.

이때, 점 P의 x좌표는

$$\frac{3 \times (-4) + 2 \times a}{3+2} = 0$$

$$\text{이므로 } a = 6$$

또, 점 P의 y좌표는

$$\frac{3 \times (-2) + 2 \times b}{3+2} = 0$$

$$\text{이므로 } b = 3$$

또, 선분 AB를 3:2로 외분하는 점을 Q라 하면 점 Q가 xy 평면 위에 있으므로 z 좌표가 0이다.

이때, 점 Q의 z 좌표는

$$\frac{3 \times c - 2 \times 6}{3 - 2} = 0$$

이므로 $c = 4$

따라서

$$a + b + c = 6 + 3 + 4 = 13$$

정답 ③

26. 출제의도 : 타원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

풀이 :

점 P의 x 좌표는 $\frac{1}{n}$ 이므로

점 P의 y 좌표를 y_1 이라 하면

타원 $C_1 : \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 위의 점 P에서의

접선의 방정식은

$$\frac{1}{n}x + y_1y = 1 \quad \text{..... ㉠}$$

㉠에서

$y = 0$ 일 때,

$$x = 2n$$

이므로 점 P에서의 접선의 x 절편 α 는

$$\alpha = 2n$$

점 Q의 x 좌표는 $\frac{1}{n}$ 이므로

점 Q의 y 좌표를 y_2 라 하면

타원 $C_2 : 2x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 Q에서

의 접선의 방정식은

$$\frac{2}{n}x + \frac{y_2y}{2} = 1 \quad \text{..... ㉡}$$

㉡에서

$y = 0$ 일 때,

$$x = \frac{n}{2}$$

이므로 점 Q에서의 접선의 x 절편 β 는

$$\beta = \frac{n}{2}$$

$6 \leq \alpha - \beta \leq 15$ 에서

$$6 \leq 2n - \frac{n}{2} \leq 15$$

$$6 \leq \frac{3n}{2} \leq 15$$

$$4 \leq n \leq 10$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 은 4, 5, 6, ..., 10이고, 그 개수는 7이다.

정답 ①

27. 출제의도 : 공간도형의 위치관계에 관한 성질을 이용하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

직선 BC가 평면 AMD와 수직이므로

$$\overline{BC} \perp \overline{AM}$$

이때 점 M이 선분 BC의 중점이므로 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC} = 6$ 인 이등변삼각형이고

$$\overline{BM} = 2\sqrt{5}$$

이므로 $\overline{AM} = \sqrt{36-20} = 4$

즉, 삼각형 AMD는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

또, $\overline{DM} \perp \overline{BC}$ 이므로

$$\overline{CD} = \sqrt{16+20} = 6$$

이고, 점 M이 선분 BC의 중점이므로 삼각형 DBC도 이등변삼각형이다.

그러므로 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발은 선분 DM 위에 있고, 삼각형 AMD가 정삼각형이므로 수선의 발은 선분 DM의 중점이다. 이 점을 N이라 하자.

이때 삼각형 NCD의 넓이를 S_1 이라 하면

S_1 은 삼각형 BCD의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 이므로

$$S_1 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times 4 = 2\sqrt{5}$$

한편, 삼각형 ACD에서 선분 AD의 중점을 L이라 하면

$$\overline{CL} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{DL}^2} = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}$$

이므로 삼각형 ACD 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

그러므로 두 평면 ACD, BCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 삼각형 ACD의 평면 BCD 위로의 정사영이 삼각형 NCD이므로

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{8}$$

이때 삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r 이라 하면

$$(4\sqrt{2}-r) : r = 3 : 1$$

이므로

$$r = \sqrt{2}$$

따라서 삼각형 ACD에 내접하는 원의 넓이가 2π 이므로 이 원의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는

$$\begin{aligned} 2\pi \times \cos\theta &= 2\pi \times \frac{\sqrt{10}}{8} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{4}\pi \end{aligned}$$

정답 ①

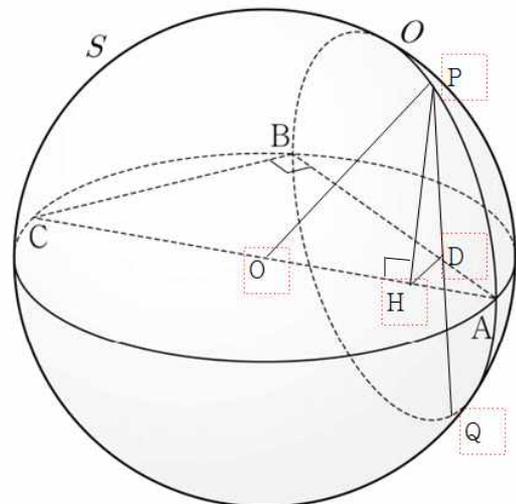
28. 출제의도 : 공간에서 구와 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\overline{AB} = 8, \overline{BC} = 6, \angle ABC = \frac{\pi}{2}$$

이므로

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} \\ &= \sqrt{8^2 + 6^2} \\ &= 10 \end{aligned}$$



선분 AC의 중점을 O라 하면

구 S의 중심은 점 O이고, 반지름의 길이는 5이다.

원 O를 포함하는 평면과 평면 ABC가 수직이므로

선분 PQ와 선분 AB가 만나는 점을 D라 하면

$$\overline{PD} \perp \overline{AB}, \overline{PD} = \overline{QD}$$

점 P에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$\overline{PO} = 5, \overline{PH} = 4$$

이므로

직각삼각형 POH에서

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \sqrt{\overline{PO}^2 - \overline{PH}^2} \\ &= \sqrt{5^2 - 4^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\overline{AH} = \overline{OA} - \overline{OH} = 5 - 3 = 2$$

한편,

$$\overline{PH} \perp \overline{AC}, \overline{PD} \perp (\text{평면 ABC})$$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{AC} \perp \overline{DH}$$

삼각형 ABC와 삼각형 AHD는 서로 닮음이므로

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AH} : \overline{HD} \text{에서}$$

$$8 : 6 = 2 : \overline{HD}$$

$$\overline{HD} = \frac{3}{2}$$

직각삼각형 PHD에서

$$\begin{aligned} \overline{PD} &= \sqrt{\overline{PH}^2 - \overline{HD}^2} \\ &= \sqrt{4^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{55}}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= 2 \times \overline{PD} \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{55}}{2} \\ &= \sqrt{55} \end{aligned}$$

정답 ④

29. 출제의도 : 쌍곡선의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{35} = 1$ 의 두 초점이

$$F(c, 0), F'(-c, 0) \quad (c > 0)$$

이므로

$$c^2 = 1 + 35 = 36 \text{에서}$$

$c > 0$ 이므로

$$c = 6$$

$\overline{PF} = \alpha$ 라 하면

$$\overline{PQ} = \overline{PF} = \alpha$$

또, 점 P가 쌍곡선 위에 있는 제1사분면 위의 점이므로

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \text{에서}$$

$$\overline{PF'} = \overline{PF} + 2 = \alpha + 2$$

$$\overline{QF'} = \overline{PQ} + \overline{PF'}$$

$$= \alpha + (\alpha + 2)$$

$$= 2(\alpha + 1)$$

삼각형 QF'F와 삼각형 FF'P가 서로 닮음이므로

$$\overline{QF'} : \overline{FF'} = \overline{FF'} : \overline{PF'}$$

$$2(\alpha+1) : 12 = 12 : (\alpha+2)$$

$$2(\alpha+1)(\alpha+2) = 144$$

$$\alpha^2 + 3\alpha - 70 = 0$$

$$(\alpha+10)(\alpha-7) = 0$$

$$\alpha > 0 \text{ 이므로}$$

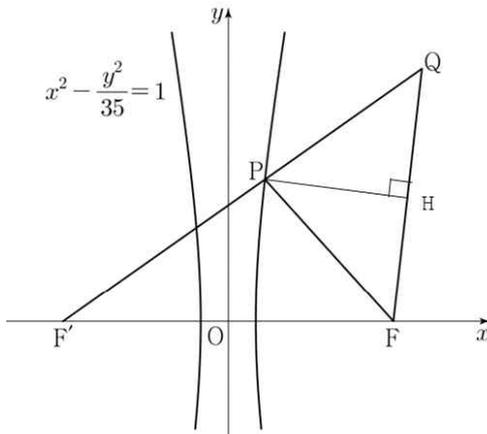
$$\alpha = 7$$

$$\text{또, } \overline{QF'} : \overline{QF} = \overline{FF'} : \overline{FP} \text{ 에서}$$

$$16 : \overline{QF} = 12 : 7$$

$$12 \times \overline{QF} = 16 \times 7$$

$$\overline{QF} = \frac{28}{3}$$



삼각형 PFQ에서

점 P에서 변 QF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{PQ} = \overline{PF}$$

이므로 점 H는 선분 QF의 중점이다.

$$\text{즉, } \overline{FH} = \frac{1}{2} \overline{QF} = \frac{1}{2} \times \frac{28}{3} = \frac{14}{3}$$

직각삼각형 PFH에서

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{PF}^2 - \overline{FH}^2}$$

$$= \sqrt{7^2 - \left(\frac{14}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{7\sqrt{5}}{3}$$

삼각형 PFQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{QF} \times \overline{PH}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{28}{3} \times \frac{7\sqrt{5}}{3}$$

$$= \frac{98}{9} \sqrt{5}$$

따라서

$$p = 9, q = 98$$

이므로

$$p + q = 9 + 98 = 107$$

정답 107

30. 출제의도 : 벡터의 연산을 이용하여 두 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

풀이 :

선분 BC의 중점이 원점 O에 오고 점 B의 좌표가 (-2, 0)이 되도록 정사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓자.

$$|\overline{XB} + \overline{XC}| = |2\overline{XO}|$$

이고,

$$|\overline{XB} - \overline{XC}| = |\overline{CB}| = 4$$

이므로 주어진 조건에 의하여

$$|2\overline{XO}| = 4, \text{ 즉 } |\overline{XO}| = 2$$

이므로 점 X가 나타내는 도형 S는 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이다.

한편, $4\overline{PQ} = \overline{PB} + 2\overline{PD}$ 에서

$$4(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) + 2(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OP})$$

$$= 18 - 2\sqrt{2}$$

$$4\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OP}$$

따라서

$$\text{즉, } \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OP}$$

$$M \times m = (18 + 2\sqrt{2})(18 - 2\sqrt{2})$$

$$= 324 - 8 = 316$$

이때 $\overrightarrow{OB} = (-2, 0)$, $\overrightarrow{OD} = (2, 4)$ 이므로

정답 316

$$\overrightarrow{OQ} = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) + (1, 2) + \frac{1}{4}\overrightarrow{OP}$$

$$= \left(\frac{1}{2}, 2\right) + \frac{1}{4}\overrightarrow{OP}$$

그러므로 점 Q가 나타내는 도형은 도형

S를 원점 O를 중심으로 $\frac{1}{4}$ 배로 축소한

후 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$, y축이 방향으로

2만큼 평행이동한 원이다. 이 원의 중심

을 R이라 하자. 즉, 점 Q가 나타내는 도

형은 중심이 $R\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 이고 반지름의 길이

가 $\frac{1}{2}$ 인 원이다.

이때,

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RQ})$$

$$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{RQ}$$

이고,

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AR} = (4, -4) \cdot \left(\frac{5}{2}, -2\right) = 18$$

로 일정하다.

한편, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{RQ}$ 의 값은 두 벡터 \overrightarrow{AC} ,

\overrightarrow{RQ} 가 같은 방향일 때 최대이고 반대 방

향일 때 최소이므로

$$M = 18 + |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{RQ}| = 18 + 4\sqrt{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= 18 + 2\sqrt{2}$$

$$m = 18 - |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{RQ}| = 18 - 4\sqrt{2} \times \frac{1}{2}$$